Analysis I PVK

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Vorwort

Dieses Skript wurde unter Verwendung der Notizen und den Übungen der Vorlesung Analysis I D-ITET (Herbstsemester 2014) verfasst. Einige Aufgaben wurden ausserdem von dem Buch *Analysis I* von Thomas Micheals und von dem Skript *Analysis I/II* von Prof. U. Stammbach adaptiert. Ziel dieses Skriptes ist der Möglichkeit zu dienen, den Stoff der Vorlesung zu wiederholen.

Ich kann weder Vollständigkeit noch Korrektheit des Skriptes garantieren: kleine Fehler können enthalten sein.
Deshalb bin ich dankbar, wenn mir Fehler gemeldet werden, sotdass ich sie korrigieren kann. Für Verbesserungsvorschläge bin ich natürlich auch offen.

Ich möchte mich bei allen Personen, die mir bei der Erstellung dieses Skriptes geholfen haben, bedanken.

Ich wünsche euch viel Erfolg bei der Prüfung!

2. Juli 2015 Nicolas Lanzetti, lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen

Eine Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

mit **Definitionsbereich** $D(f) = A$ und **Wertebereich** $W(f) = B$ ist...

- **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$
- **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$
- **injektiv**, falls $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$
  Graphisch: Jede Parallele zur x-Achse schneidet $\Gamma(f)$ in höchstens einem Punkt
- **surjektiv**, falls $f(A) = B$, das heisst für jede $b \in B$ gibt es mindestens ein $a \in A$
- **bijektiv**, falls $f(x)$ sowohl injektiv als surjektiv ist
- **monoton wachsend**, falls $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2) \,\forall x_1, x_2 \in D(f)$ (**strikt** falls $f(x_1) < f(x_2)$)
- **monoton fallend**, falls $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2) \,\forall x_1, x_2 \in D(f)$ (**strikt** falls $f(x_1) > f(x_2)$)

Beispiel. $f(x) = x \cdot \cos(x)$ ist ungerade: $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cdot \cos(x) = -f(x)$.

1.1 Grenzwerte von Funktionen

1.1.1 "Typische" und wichtige Grenzwerte

- $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x\to\infty} c = c$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

1.1.2 Rechenregel für Grenzwerte

Seien $\lim_{x\to\xi} f(x) = a$ und $\lim_{x\to\xi} g(x) = b$, dann gilt (falls diese Grenzwerte existieren):

- $\lim_{x\to\xi} f(x) \pm g(x) = a \pm b$
- $\lim_{x\to\xi} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

1.2 Stetigkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle ξ_0 stetig falls $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Eine Funktion heisst stetig, falls sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereich $D(f)$ stetig ist.

Beispiel. Ist $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{für } x \geq 0 \\ x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ stetig?

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 - e^x = 1 - 1 = 0$

So ist $f(0) = 0$ und deshalb ist $f(x)$ stetig.

1.3 Die inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine injektive Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & W(f) & \to & D(f) \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

die inverse Funktion (oder Umkehrfunktion) von $f(x)$.

Bemerkung. Für eine invertierbare Funktion $f(x)$ gilt:

- $D(f^{-1}) = W(f) \leftrightarrow D(f) = W(f^{-1})$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$
- $\Gamma(f^{-1})$ ist eine Spiegelung an der Gerade $y = x$ von $\Gamma(f)$

1.4 Asymptoten

Definition. Für eine Funktion $f(x)$ mit

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

heisst die Gerade $x = x_0$ senkrechte oder vertikale Asymptote von $f(x)$.

Definition. Eine Funktion $g(x)$ heisst Asymptote der Funktion $f(x)$ falls gilt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

Gemäss der Definition ist die Gerade $y = m \cdot x + b$ Asymptote von $f(x)$ falls

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (m \cdot x + b)) = 0$$

Die Parameter der Gerade sind gegeben durch

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x)$$

1.5 Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen sind definiert als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Es gilt

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Die inversen Funktion sind

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \qquad \operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \qquad \operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

1.6 Aufgaben

1. Man bestimme die inverse Funktion sowie ihren Definitionsbereich $D(f)$ und ihren Wertebereich $W(f)$ von den folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x) = (3x+4)^3$

   (b) $f_2(x) = \sin(2x)$

2. Finden Sie die Asymptoten der folgenden Funktionen:

   (a) $f_1 = \frac{x+1}{x}$
   (b) $f_2(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$
   (c) $f_3(x) = \frac{3x^3-x+2}{x^2+3x+4}$

3. Man bestimme den Definitionsbereich der folgenden Funktion

$$f(x) = \sqrt{9 - \sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

4. Sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{falls } x < 0 \\ cx + d & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+8} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$
Bestimme $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

5. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-b^2}{x-b} & \text{falls } x \neq b \\ 0 & \text{falls } x = b \end{cases}$$

   (a) Existiert $g(b)$?
   (b) Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b} g(x)$?
   (c) Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

6. Man finde die Inverse der Funktion

$$f(x) = \sinh(x)$$

7. Man berechne die Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x + 2}{x^3 + 1}$$

für $x \to \pm\infty$.

8. Man berechne die Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x+a)} \qquad a \neq 0$$

für $x \to \pm\infty$.

2 Differentialrechnung

Die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 wird mit dem Grenzwert

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

definiert. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, ist $f(x)$ an der Stelle x_0 nicht differenzierbar. Die Ableitung von $f(x)$ ist definiert als

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$$

2.1 Ableitungsregeln

- **Linearität:**
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \qquad (c \in \mathbb{R})$$
- **Produktregel:**
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$
- **Quotientregel:**
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$
- **Kettenregel:**
$$(f(g(x))' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
- **Ableitung der inversen Funktion:**
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
- **Wichtige Ableitungen:**
Trigonometrie: $(\sin(x))' = \cos(x)$ $\quad(\cos(x))' = -\sin(x)$ $\quad(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
Exponetial: $(e^x)' = e^x$ $\quad(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\quad(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{(\alpha-1)}$ $\quad(\sinh(x))' = \cosh(x)$

2.2 Linearisieren

Die lineare Ersatzfunktion von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist gegeben durch

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

und entspricht der Gleichung der Tangente an $f(x)$ in x_0.

2.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a,b]$ stetige und auf dem Intervall (a,b) differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a,b)$, so dass*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b-a) \Longleftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

2.4 Regel von Bernoulli-Hôpital

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder mit $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung. Im Fall "$a = \pm\infty$" kann man die Regel auch anwenden.

2.5 Ableitungen und Graphen von Funktionen

- $f'(x) > 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ **steigend** auf (a, b)
- $f'(x) < 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ **fallend** auf (a, b)
- $f'(x_0) = 0 \iff x_0$ heisst mögliche Extremalstelle:
  - $f''(x_0) > 0 : x_0$ ist eine Minimalstelle
  - $f''(x_0) < 0 : x_0$ ist eine Maximalstelle
- $f''(x) > 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ ist **konvex** auf (a, b)
- $f''(x) < 0$ auf dem Intervall $(a, b) \iff f(x)$ ist **konkav** auf (a, b)
- $f''(x_0) = 0, f(x)$ konkav auf (a, x_0) und konvex auf (x_0, b) (oder umgekehrt), dann heisst x_0 **Wendepunkt**

2.6 Aufgaben

1. Man bestimme die folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim_{x \to 0^+} x^x$

   (b) $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

   (d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan x$

2. Berechnen Sie

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{\tan x}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

(c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

(d) $\lim x \to 0 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3. Berechnen Sie

   (a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\tan x$
   (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$
   (d) $\lim_{x\to 0}\cot x\cdot\log(1+3x)$

4. Man finde die Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x) = (1-x)^5$
   (b) $f_2(x) = (\sqrt{x} + \cos(x))^{18}$
   (c) $f_3(x) = x^x$
   (d) $f_4(x) = \arccos(2x)$

5. Man finde die Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$

   (b) $\frac{1}{\sqrt[5]{(1-7x)^2}}$

   (c) $(\sqrt[3]{x}+\cos(\arctan x))^{2014}$

6. Man finde die Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $\cos^2(\arccos\sqrt{x})$ (b) $\cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ (c) $\cot(x^3)$

7. Man bestimme Extrema und Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

8. Man bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktionen f bzw. g an der Stelle $x_0 = 0$.

   (a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad x_0 = 6$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad x_0 = 11$

   (c) $g(x) = 2x + 2$ $\quad x_0 = 0$

   (d) $g(x) = 2x + 2$ $\quad x_0 = 4$

9. Ein elektrischer Strom $I(t)$ (in Ampére gemessen), werde durch die Formel

$$I(t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t)$$

beschrieben, wobei $\omega \neq 0$ eine Konstante ist. Man finde die Maximal- und Minimalwerte von $I(t)$.

10. Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

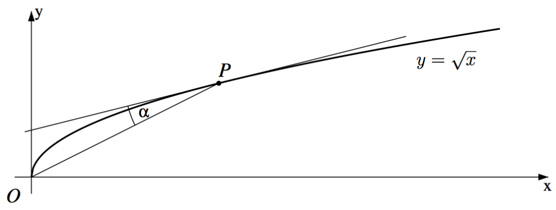
(b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

(d) Wo ist f konvex? Konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

(e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

11. Zwischen welchen Werten variiert α (Winkel zwischen der Geraden OP und der Tangente in P), wenn P die Kurve $y = \sqrt{x}$ durchläuft?



12. Diskutiere die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$$

im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität, und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

13. Bestimme den Grenzwert
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{e^x - 1}$$

14. Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + e^x & \text{für } x < 0 \\ \alpha \cdot (1+x)^{2009} + \beta \cdot e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

3 Folgen

Definition. Eine Folge von reellen Zahlen ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in reelle Zahlen.

Eine Folge kann auf verschiedene Arten dargestellt werden:

1. geschlossene Formel (z.B. $a_n = 3 \cdot n$)
2. rekursive Formel (z.B. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2 \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$)
3. andere Weise

3.1 Eigenschaften

3.1.1 Beschränktheit

Eine Zahlenfolge ist beschränkt genau dann, wenn es eine obere (bzw. untere) Schranke s gibt, für welche gilt: $s >$ (bzw. $<$) $a_n \; \forall n$

3.1.2 Monotonie

- Eine Folge ist monoton wachsend falls gilt: $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n$ (strikt falls $a_{n+1} > a_n \; \forall n$)
- Eine Folge ist monoton fallend falls gilt: $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n$ (strikt falls $a_{n+1} < a_n \; \forall n$)

3.1.3 Konvergenz

Eine Folge a_n konvergiert gegen den Grenzwert L falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index m gibt, sodass

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

Falls eine Folge nach $L = 0$ strebt, heisst sie Nullfolge (z.B. $a_n = \frac{1}{n^2}$)
Eine Folge die konvergiert heisst **konvergent**, sonst heisst sie **divergent**.

Satz. *Ist eine Folge monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.*

3.2 Grenzwerte von Folgen

Definition. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ oder $a_n \to L \; (n \to \infty)$

3.2.1 Rechenregel mit Grenzwerte

Seien a_n und b_n zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Beispiel. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{3n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{10}{n}}{3-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{3}$

3.3 Aufgaben

1. Ist die Folge
$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$
beschränkt, monoton und/oder konvergent?

2. Bestimmen Sie die folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

4 Reihen

Definition. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

heisst eine (unendliche) Reihe. Die Partialsumme einer Reihe ist definiert als

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

4.1 Konvergenz

4.1.1 Vergleichkriterien für Reihen mit nicht-negativen Glieder

Vergleichskriterium I:
Seien $a_n \geq$ und $b_n \geq 0$ zwei Folgen für $n \geq 0$. Falls es ein $C > 0$ gibt so dass

$$a_k \leq C \cdot b_k \; \forall \; k \geq k_0 \qquad k_0 \in \mathbb{N}$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Vergleichskriterium II:
Seien $a_n \geq$ und $b_n \geq 0$ zwei Folgen für $n \geq 0$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

4.1.2 Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n > 0$. Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Es gilt:

- Falls $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent
- Falls $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- Falls $L = 1 \Rightarrow$ unbestimmt

4.1.3 Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n > 0$. Nehmen wir an, dass $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R$. Es gilt:

- Falls $R > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent
- Falls $R < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent
- Falls $R = 1 \Rightarrow$ unbestimmt

4.2 Absolut Konvergenz

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Eine Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, heisst bedingt konvergent.

Satz. *Ist eine Reihe absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.*

Achtung: Dieser Satz gilt nicht in beide Richtungen!

4.2.1 Eigenschaften der Reihen

- Linearität:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$
$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n \ \forall \ c \in \mathbb{R}$$
- Die Summe von zwei konvergenten Reihe ist auch konvergent
- Die Summe einer divergenten Reihe und einer konvergenten Reihe divergiert
- Die Summe von zwei divergenten Reihen ist unbestimmt
- Falls $a_k \leq b_k \ \forall \ k$, dann gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

4.3 Aufgaben

1. Man bestimme das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot (n+1)}$$

2. Man bestimme, ob die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{n^4+2n^2+3}$$

konvergent ist.

3. Man bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

konvergent ist.

4. Man bestimme, ob die Reihe

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

konvergieren.

5. Man bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1/n}-1\right)^{n}$$

konvergent ist.

6. Man bestimme, ob die Reihe

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n}$

konvergieren.

5 Potenzreihen

Definition. Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \ldots + a_n \cdot (x-x_0)^n + \ldots$$

worin x_0 der Entwicklungspunkt ist und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge ist.

5.1 Der Konvergenzradius

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe is die Menge von allen x, für welche die Potenzreihe konvergiert. Dieser Bereich wird durch den Konvergenzradius ρ begrenzt, da heisst

$$\begin{cases} |x-x_0| < \rho \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ (absolut) konvergiert} \\ |x-x_0| > \rho \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Für $|x-x_0| = \rho$ kann man keine Aussagen über das Konvergenzverhalten der Reihe machen. Der Konvergenzradius berechnet sich aus

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

oder als (analog zum Wurzelkriterium)

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(|a_n|)^{\frac{1}{n}}}$$

Innerhalb dem Konvergenzbereich können Potenzreihen wie normale Funktionen integriert und abgeleitet werden:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$

5.2 Die Taylor-Reihe

Die Taylor-Reihe einer Funktion $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0 ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

oder, explizit geschrieben,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + \ldots$$

5.3 Die geometrische Reihe

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

hat Konvergenzradius 1 (gemäss Formel, siehe 5.1) und stellt im Bereich $(-1, 1)$ die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

dar.
Oft kann man die geometrische Reihe benutzen, um eine Potenzreihe einer Funktion zu finden.

Bemerkung. Die Taylor-Reihe in $x_0 = 0$ von $\frac{1}{1-x}$ entspricht genau der geometrischen Reihe.

5.4 Aufgaben

1. Man bestimme den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot (x-1)^n$

2. Man bestimme den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^3} \cdot x^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \sqrt{(3n-2) \cdot 2^n} \cdot x^n$

3. Man bestimme den Konvergenzradius ρ der folgenden Reihen:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln(n))^n \cdot x^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} \cdot x^{5n}$ (*Tipp:* Setze $y = x^5$)

4. Man bestimme den Konvergenzbereich der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot e^{2nx}$

5. Man bestimme die Koeffizienten a_k der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{(x-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

6. Man berechne die Potenzreihe von $\operatorname{arctanh}(x)$ um $x_0 = 0$.

7. Man bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $\frac{x-1}{(x^2+1)\cdot(x+1)}$ um $x_0 = 0$.

8. Man berechne die ersten 3 nichtverschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion
$$x \mapsto \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

9. Berechne die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

um den Punkt $x_0 = 0$.

10. Man gebe die ersten 3 nichtverschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion
$$x \mapsto e^{x^2} \cdot \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

11. Man bestimme die Taylorreihe von $\sin(x^3)$ um $x_0 = 0$.

6 Komplexe Zahlen

6.1 Definition

Eine komplexe Zahl $z = a + i \cdot b$ wird durch einen realen Teil a und einen imaginären Teil b. i bezeichnet die imaginäre Einheit

$$i^2 = -1$$

Jede komplexe Zahl z kann in der komplexen Ebene (Gauss'sche Ebene) dargestellt werden.

6.1.1 Der komplex konjugiert

Der komplex konjugiert einer komplexen Zahl ist wie folgt definiert:

$$\bar{z} = a - i \cdot b$$

In der komplexen Ebene $\bar{z}$ entspricht einer Spiegelung von z um die x-Achse.

6.2 Rechenregeln

Seien $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ und $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$, dann gilt...

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i \cdot (b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

6.3 Darstellungsformen

6.3.1 Kartesische Form

Die kartesische Darstellungsform der komplexen Zahl z ist, wie im Abschnitt A.1 eingeführt, die Summe aus dem Realteil a und dem Imaginärteil b.

6.3.2 Trigonometrische Form

In der trigonometrischen Form wird die komplexe Zahl z in Polarkoordinaten r (Betrag) und φ (Winkel oder Phase) dargestellt. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$a = r \cdot \cos\varphi \qquad b = r \cdot \sin\varphi$$

und beziehungsweise

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Für die komplexe Zahl z erhält man

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \operatorname{cis}(\varphi)$$

6.3.3 Exponetialform

Mit der Euler Formel kann man die komplexe Zahl z auf die folgende Form bringen:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

In dieser Darstellungsform gelten natürlich alle Potenzeigenschaften.

6.4 Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung der Form

$$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$$

besitzt in der komplexen Menge genau n Lösungen.

Bemerkung. Falls die Koeffizienten a_n der Gleichung reell sind und z eine Lösung ist, so ist auch $\bar{z}$ eine Lösung der Gleichung.

6.5 Aufgaben

1. Stellen sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + i \cdot y$ dar:

   (a) $\frac{1}{1+\frac{2}{i+7}}$ (b) $e^{e^{-i\pi/3}}$ (c) $e^{i(5\pi+i\ln 4)}$

2. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ dar:

(a) 1

(b) $-i$

(c) $1 - i\sqrt{3}$

(d) $e^{i\pi} + 2e^{i\pi/2}$

(e) $\frac{2+2i}{1/2-\sqrt{3}/2i}$

3. Das Polynom $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ besitzt die Nullstelle $\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$. Man bestimme die anderen Nullstellen des Polynoms und schreibe es als Multiplikation zwei reellen Polynome.

4. Man finde alle Lösungen der Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ und schreibe sie in Polarform.

5. Man berechne:

   (a) die komplexe Zahl $(1-i)^{101}$.

   (b) alle vierten Wurzel von -1 in $\mathbb{C}$.

   (c) alle dritte Wurzel von $\sqrt{3}-i$.

6. Schreibe die beiden Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 3 + 4i = 0$$

in der Polarform $re^{i\varphi}$ für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

7 Differentialgleichungen

7.1 Definitionen

Definition. Die Ordnung einer Differentialgleichung ist höchste Ableitung, die in der Gleichung vorkommt.

Definition. Eine Differentialgleichung heisst linear, falls die gesuchte Funktion und ihrer Ableitung in linearen Form vorkommen.

Definition. Eine Differentialgleichung heisst homogen, falls alle Terme von der gesuchten Funktion oder von einer ihrer Ableitungen abhängen. Sonst ist die Differentialgleichung inhomogen.

Beispiel. Man diskutiert die Eigenschaften der folgenden Differentialgleichungen:

1. $y' + y^3 + 2 = x^7$
2. $y^{(8)} + \sin(x) \cdot y''' + e^x \cdot y = y' \cdot \log(x^2 + 1)$

Lösung:

1. Die DGL ist nicht linear (y^3), inhomogen (x^7 und 2) und hat Ordnung 1 (y').
2. Die DGL ist linear, homogen und hat Ordnung 8 ($y^{(8)}$).

7.2 Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung $y(x)$ einer linearen Differentialgleichung lässt sich als Summe der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung

$$y = y_h + y_p$$

schreiben.

Satz. *Sind $y_1, \ldots, y_n$ n Lösungen einer homogenen Differentialgleichung, dann ist auch jede Linearkombination von $y_1, \ldots, y_n$ eine Lösung.*

7.2.1 Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = 0$$

können mit dem Ansatz

$$y_h(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

gelöst werden. Durch Einsetzen und Teilen durch $C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ erhält das charakteristiche Polynom:

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + a_0 = 0$$

Die homogene Lösung y_h ist die Superposition aller Lösungen:

- verschiedene reelle Nustellen: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \qquad y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \qquad y_n = C_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x}$$

- Nullstelle λ_1 mit Vielfachheit k:

$$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \qquad y_2 = C_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \qquad y_k = C_k \cdot x^{k-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$$

- komplex konjugiertes k-faches Nullstellenpaar $\lambda_{1,2} = a \pm i \cdot b$:

$$y_1 = e^{a \cdot x} \cdot (A_1 \cdot \cos(b \cdot x) + B_1 \cdot \sin(b \cdot x)) \qquad y_2 = e^{a \cdot x} \cdot x \cdot (A_2 \cdot \cos(b \cdot x) + B_2 \cdot \sin(b \cdot x))$$

$$y_k = e^{a \cdot x} \cdot x^{k-1} \cdot (A_k \cdot \cos(b \cdot x) + B_k \cdot \sin(b \cdot x))$$

7.2.2 Inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung lässt sich als

$$y = y_h + y_p$$

schreiben. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung kann wie in 7.2.1 gefunden werden. Die partikuläre Lösung findet man durch einen "educated guess"(Ansatz).
Für die Ansätze kann die folgende Tabelle benutzt werden:

Störfunktion $g(x)$	Ansatz für y_p mit $A, B, \ldots \in \mathbb{R}$
Konstante	$y_p = A$
Lineare Funktion	$y_p = A \cdot x + B$
Quadratische Funktion	$y_p = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$
$A \cdot \sin(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = C \cdot \sin(\omega x) + D \cdot \cos(\omega x)$
$A \cdot e^{B \cdot x}$	$y_p = C \cdot e^{B \cdot x}$

Bemerkung. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung können die Konstanten $A, B, \ldots$ bestimmt werden (oft mit Koeffizientenvergleich).

7.2.3 Euler'sche Differentialgleichung

Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \cdot y = 0$$

heissen Euler'sche Differentialgleichungen und können mit dem Ansatz

$$y_h = C \cdot x^\alpha$$

Durch Einsetzen und Teilen durch $C \cdot x^\alpha$ erhält das sogenannte Indexpolynom. Die Lösung ist wieder eine Superposition der eizelner Lösungen:

- verschiedene reelle Nustellen: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_n$:

$$y_1 = C_1 \cdot x^{\alpha_1} \qquad y_2 = C_2 \cdot x^{\alpha_2} \qquad y_n = C_n \cdot x^{\alpha_n}$$

- Nullstelle α_1 mit Vielfachheit k:

$$y_1 = C_1 \cdot x^{\alpha_1} \qquad y_2 = C_2 \cdot \ln|x| \cdot x^{\alpha_1} \qquad y_k = C_k \cdot (\ln|x|)^{k-1} \cdot x^{\alpha_1}$$

- komplex konjugiertes k-faches Nullstellenpaar $\alpha_{1,2} = a \pm i \cdot b$:

$$y_1 = x^a \cdot (A_1 \cdot \cos(b \cdot \ln|x|) + B_1 \cdot \sin(b \cdot \ln|x|))$$

$$y_2 = x^a \cdot \ln|x| \cdot (A_2 \cdot \cos(b \cdot \ln|x|) + B_2 \cdot \sin(b \cdot \ln|x|))$$

$$y_k = x^a \cdot (\ln|x|)^{k-1} \cdot (A_k \cdot \cos(b \cdot \ln|x|) + B_k \cdot \sin(b \cdot \ln|x|))$$

Ist ist Differentialgleichung inhomogen könnten die Ansätze

$$y_p = A \cdot x^B \qquad y_p = A \cdot \ln|x|$$

helfen ($y = y_h + y_p$).

7.3 Aufgaben

1. Finde die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'(x) \cdot \cos(x) - y(x) \cdot \sin(x) = 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

dessen Graph den Punkt $(0, -1)$ enthält.

2. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y'''(x) + 2y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$

   (b) $y'''(x) - 7y''(x) + 16y'(x) - 12y(x) = 0$

   (c) $y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) - y(x) = 0$

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y^{(4)}(x) - 4y'''(x) + 9y''(x) - 10y'(x) + 6y(x) = 0$

   (b) $y^{(4)} + 4y'''(x) + 10y''(x) + 12y'(x) + 9y(x) = 0$

4. Exisitert eine homogene Differentialglechung zwiter Ordnung mit konstanten (reellen) Koeffiziente mit
   (a) $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$
   (b) e^x und $\sin(x)$

   als Lösung?

5. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + y' = 1$$

6. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 12y' - 8y = e^{2x}$$

7. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
&y''(x) - y(x) = \cosh(x) \\
&y(0) = 1 \\
&y(1) = e^{-1}
\end{aligned}
$$

8. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - 2y(x) = x^2 e^{2x}$$
$$y(0) = -3$$

9. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''' + y'' - 2y = 2$$

Man bestimme die Lösung, die den Anfangsbedinungen $y(0) = 0, y'(0) = -1$ genügt und die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt.

10. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\sin(x) \cdot y' + \cos(x) \cdot y = e^x$$

11. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'' - 2 \cdot \frac{y'}{x} + 2 \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

12. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 \cdot u''(r) = -r \cdot u'(r) + u(r) + r^2 \qquad r > 0$$

(a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

(b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche fur $r \to 0$ beschränkt bleiben.

13. Man bestimme die allgemeine Lösung ($x > 0$) von

(a) $x^2 \cdot y''(x) - 3x \cdot y'(x) + 5y(x) = 0$

(b) $2x \cdot y'(x) - y(x) = \ln(x)$

8 Integralrechnung

8.1 Hauptsatz der Integralrechnung

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

8.1.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ mit } F'(x) = f(x)$$

Die Funktion $F(x)$ ist deshalb eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beispiel. Verifizierung von Integrale mit der Ableitung:

1. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ weil $(\frac{x^2}{2} + C)' = x$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$ weil $(e^x + C)' = e^x$
3. $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$ weil $(\sin(x) + C)' = \cos(x)$

8.1.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ mit } F'(x) = f(x)$$

8.2 Integrationsregeln

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

8.3 Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechung. Diese Methode löst kein Integral vollständig, sondern wandelt sie ein kompliziert zu integrierendes Produkt zweier Funktionen in eine Summe eines einfacheren Integrals und einer Funktion um.

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$$

Bemerkung. Die Funktion $u(x)$ sollte eine einfach integierbare Funktion sein und die Funktion $v(x)$ möglichst eine Polynomfunktion (z.B. x) sein, so dass sie nach der Ableitung einfacher wird (z.B. $(x)' = 1$).

8.4 Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode ist die Umkehrung der Kettenregel aus der Differentialrechnung. Sie wird oft angewandt, wenn der Integrand aus dem Produkt einer Funktion und deren innerer Ableitung besteht.

1. Substitution finden (Tabellen in der Formelsammlung)
2. dx substituiren: $f'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{f'(x)}$
3. Substitution in das Integral einsetzen (auch die Integralsgrenze sind zu substituiren)
4. Integral lösen und rücksubstituiren

8.4.1 Nützliche Formeln

Die folgende zwei Formeln können mit Hilfe der Substitutionsmethode ($u = f(x)$) bewiesen werden (oder direkt mit $f'(x)\,dx = df$) und können bei der Berechnung von Integralen extrem hilfsreich sein:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot(f(x))^2 + C$$

8.5 Integrale von rationellen Funktionen

Integrale von rationalen Funktionen $f(x)/g(x)$ lassen sich mit der Methode der Partialzerlegung auf die folgende Integrale zurückführen:

- $\int \frac{1}{x+b} dx = \ln|x+b| + C$
- $\int \frac{1}{(x+b)^n} dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x+b)^{n-1}} + C$ mit $n \geq 2$
- $\int \frac{x+b}{x^2+2bx+c} dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+2bx+c| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+2bx+c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\cdot\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C$
  ($c - b^2 > 0 \longleftrightarrow x^2 + 2bx + c$ keine reellen Nullstellen hat)
- $\int \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^n} dx = \frac{1}{2\cdot(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+2bx+c)^{n-1}} + C$ mit $n \geq 2$
- $I_n = \int \frac{1}{(x^2+2bx+c)^n} dx = ?$ ($c - b^2 > 0, n \geq 2$)
  $\to 2\cdot(n-1)\cdot(c-b^2)\cdot I_n = (2n-3)\cdot I_{n-1} + \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{n-1}}$

8.5.1 Partialbruchzerlegung

Die Idee der Partialbruchzerlegung ist eine schwierige rationale Funktion in mehrere einfachere Funktionen umzuwandeln. Dafür man macht man folgende Ansätze:

- einfache Nullstellen (1 und -3 im Beispiel):
$$\frac{N(x)}{(x-1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$
- wiederholte Nullstellen (1 (2-Mal) und -3 im Beispiel):
$$\frac{N(x)}{(x^2-2x+1)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

- komplex konjugierte Nullstellen ($\pm i$ und -3 im Beispiel):

$$\frac{N(x)}{(x^2+1)\cdot(x+3)} = \frac{A\cdot x+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+3}$$

Bemerkung. Ist der Grad von $N(x)$ grösser als der Grad des Nenners muss man zuerst Polynomdivision durchführen.

Bemerkung. $A, B, C, \dots$ sind reelle Konstanten.

8.6 Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_a^\xi f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_\xi^a f(x)dx$$

Für eine auf $(a, b]$ stetige Funktion f $(a < b)$ ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to a^+}\int_\xi^b f(x)dx$$

Für eine auf $[a, b)$ stetige Funktion f $(a < b)$ ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b^-}\int_a^\xi f(x)dx$$

8.7 Aufgaben

1. Man berechne die folgende Integrale:

   (a) $\int \tan^2 x \, dx$

   (b) $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin x \, dx$

2. Man berechne die folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int (x^2+1)\cdot(x^3+3x+2)^8\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

3. Man berechne die folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ (c) $\displaystyle\int x^2 \cdot \log x\,dx$

   Tipp: Für (b) substituire $z = \sqrt{e^x - 1}$.

4. Man berechne die folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3-x^2+x-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

5. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{-1}^{1} |t| \, dt$$

6. Man berechne die folgende uneigentliche Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7. Mit Hilfe einer geeigneten Substitution bestimme man die folgende uneignetliche Integrale:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$

8. Man bestimme, im Falle der Konvergenz, die folgende uneigentliche Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin(x)\,dx$

9. Bestimme, im Falle der Konvergenz, folgende uneigentliche Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}\,dx \quad (n\in\mathbb{N})$

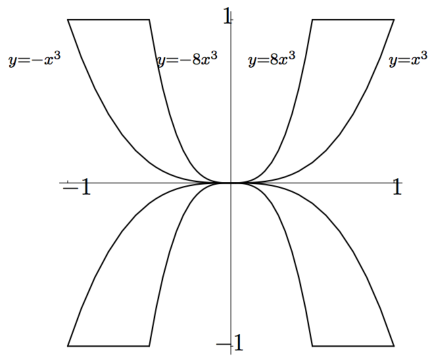
(b) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\log(x)\cdot\log^2(\log(x))}$

10. Es sei f eine auf der ganzen $\mathbb{R}^3$ definirte und stetige Funktion. Wir definieren

$$F : x \mapsto \int_0^{\sin x} f(t)\, dt$$

Bestimme $F'(x)$.

11. Bestimmen Sie die Fläche des unten dargestellten x-förmigen Bereichs.



12. Bestimmen Sie die Fläche des schwarzen Flächestucks.